Projektion von Geodaten auf eine Bildfläche

Geo-Daten sind geographische Länge ϕ und Breite θ, und Höhe über dem Meeresspiegel h.

In einem rechtshändigen Koordinatensystem mit Ursprung am Erdmittelpunkt zeigt die X-Achse auf den Schnittpunkt von Äquator und Nullmeridian, die Y-Achse auf 90° östlicher Länge am Äquator und die Z-Achse auf den Nordpol. Dann ist ein Punkt auf der Erde gegeben als

$$\vec{X} = (R + h) \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \, \cos\phi \\ \cos\theta \, \sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \tag{1}$$

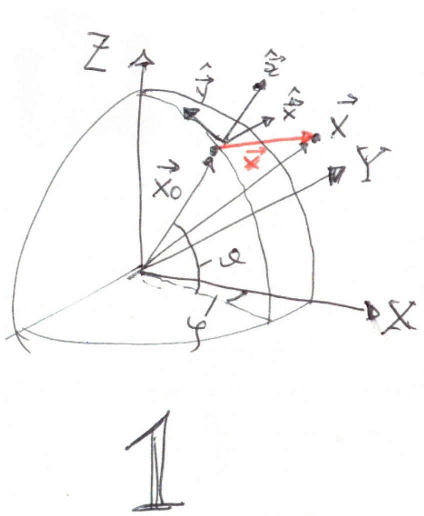
mit $R = 6371$ km dem Erdradius.

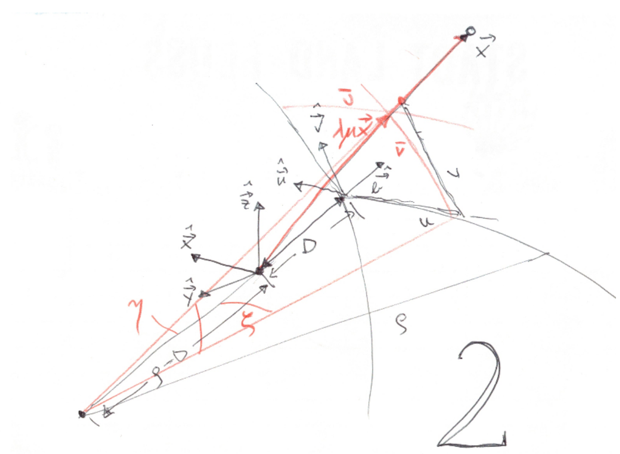
An einem bestimmten Punkt $\vec{X}_o$, dem Ort eines Beobachter wird ein rechtshändiges lokales Koordinatensystem mit den orthonormalen Basisvektoren $\{\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}, \hat{\vec{z}}\}$ definiert, die den Richtungen Osten, Norden und oben entsprechen:

$$\hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\sin\phi_o \\ \cos\phi_o \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\vec{y}} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_o \, \cos\phi_o \\ -\sin\theta_o \, \sin\phi_o \\ \cos\theta_o \end{pmatrix} \qquad \hat{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \cos\theta_o \, \cos\phi_o \\ \cos\theta_o \, \sin\phi_o \\ \sin\theta_o \end{pmatrix} \tag{2}$$

In diesem lokalen Koordinatensystem sind die Koordinaten eines Punktes $\vec{X}$ durch die Projektionen der Differenz zum Beobachter auf die Basisvektoren gegeben, siehe Bild 1:

$$\vec{x} = (\vec{X} - \vec{X}_o) \cdot \left(\hat{\vec{x}}, \, \hat{\vec{y}}, \, \hat{\vec{z}}\right) \tag{3}$$





Der Beobachter kann sich um sich selbst drehen und aufschauen. Die Richtung seines Blicks $\hat{\vec{b}}$ sei in der Horizontalen um den Winkel β gedreht, wobei $\beta = 0$ ein Blick nach Osten bedeute, und in der Vertikalen um den Winkel α, wobei $\alpha = 0$ eine waagerechte Blickrichtung bedeute. Im Abstand D vor dem Beobachter befinde sich eine Ebene (Papier, Bildschirm) orthogonal zur Blickrichtung mit 2-dimensionalen Koordinaten u und v parallel und senkrecht zur Unterkante des Papiers. Die Richtungsvektoren sind

$$\hat{\vec{u}} = \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\vec{v}} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha\,\cos\beta \\ -\sin\alpha\,\sin\beta \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \hat{\vec{b}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\,\cos\beta \\ \cos\alpha\,\sin\beta \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \tag{4}$$

Der Vektor zwischen Beobachter und Bildebene ist durch die Gleichung der Ebene gegeben

$$\left(\lambda\vec{x} - D\hat{\vec{b}}\right)\cdot\hat{\vec{b}} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \lambda = \frac{D}{\vec{x}\cdot\hat{\vec{b}}} \tag{5}$$

Die Punkte in der Bildebene sind durch Projektion des Vektors $\lambda\vec{x}$ auf die Richtungen $\hat{\vec{u}}$ und $\hat{\vec{v}}$ gegeben:

$$u = \lambda\vec{x}\cdot\hat{\vec{u}} \qquad v = \lambda\vec{x}\cdot\hat{\vec{v}}. \tag{6}$$

Sphärische Korrektur

Um die Abbildung mit einem Foto zu vergleichen muss ggf. eine sphärische Korrektur gemacht werden um die Verzerrung durch ein Weitwinkelobjektiv zu berücksichtigen. Dazu wird eine Kugel vom Radius ρ angenommen, die die Bildebene berührt, siehe Bild 2. Ihr Mittelpunkt befindet sich also im System des Beobachters mit Basis $\{\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{v}}, \hat{\vec{b}}\}$ bei

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D-\rho \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Der Vektor auf einen Punkt in der Bildeben ist

$$\lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ D \end{pmatrix}, \tag{8}$$

Der Blick-Strahl durchstößt die Kugel im Punkt $\mu\lambda\vec{x}$, wobei μ aus der Kugelbedigung folgt:

$$|\mu\lambda\vec{x} - \vec{m}| = \rho \qquad \longrightarrow \qquad \mu = \frac{\sqrt{D^2\rho^2 + D(2\rho - D)(u^2+v^2)} - D(\rho - D)}{D^2 + u^2 + v^2} \tag{9}$$

Für Polar und Azimutwinkel, ζ und η, des Punktes in Bezug auf de Kugel gilt

$$\begin{pmatrix} \rho\cos\eta\sin\zeta \\ \rho\sin\eta \\ \rho\cos\eta\cos\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu u \\ \mu v \\ \rho - (1-\mu)D \end{pmatrix} \tag{10}$$

Daraus folgen die Winkel zu

$$\tan\zeta = \frac{\mu u}{\rho - (1-\mu)D} \qquad \tan\eta = \frac{\mu v}{\sqrt{(\mu u)^2 + (\rho - (1-\mu)D)^2}}. \tag{11}$$

Die Bogenlängen auf der Kugel, bzw. der sphrisch gewölbten Bildfläche sind

$$\bar{u} = \eta\rho \qquad \bar{v} = \zeta\rho\cos\eta. \tag{12}$$

Für $\rho \to \infty$ gilt die planare Abbildung, dh. $\bar{u} = u$, und für $\rho = D$ folgt die sogenannte Fischaugen-Optik.

Vereinfachte Berechnung

Wenn sich alle Geo-Daten innerhalb einer Region von wenigen Kilometern Ausdehnung befinden, kann die Krümmung der Erdoberfläche vernachlässigt werden, bzw. die Differenzwinkel zwischen den Punkten können linearisiert werden. Dann ist im lokalen Koordinatensystem nach Gl.2 ein Punkt relativ zum Beobachter näherungweise gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R\cos\theta_o\,\Delta\phi \\ R\,\Delta\theta \\ \Delta h \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \Delta\theta = \theta - \theta_o, \quad \Delta\phi = \phi - \phi_o, \quad \Delta h = h - h_o. \tag{13}$$

Das selbe Ergebnis folgt aus Einsetzen von Gln.1,2 in Gl.3 mit $\Delta\theta \ll 1$, $\Delta\phi \ll 1$, $h_o, h \ll R$. In dem lokalen Koordinatensystem geht der Blick vom Ursprung (Beobachterstandort) zu einem Punkt unter dem horizontalen Winkel γ und vertikalen Winkel ν:

$$\tan\gamma = \frac{y}{x} = \frac{\Delta\theta}{\cos\theta_o\,\Delta\phi} \qquad \tan\nu = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\Delta h}{R\sqrt{(\cos\theta_o\Delta\phi)^2 + (\Delta\theta)^2}}. \tag{14}$$

Wenn der Blick des Beobachters um einen Winkel β nach Norden und um einen Winkel α nach oben gerichtet ist, folgen die Koordinaten auf der Bildfläche als Näherungslösung anstelle von Gl.6 zu

$$u = D\tan(\gamma - \beta) \qquad v = D\tan(\nu - \alpha). \tag{15}$$